

A D

## L E C T O R E M.



Ostquam finem exercitationibus hisce imponere decreveram, diversa mihi alia, Amice Lector, jucundissimæ ac perpulchræ contemplationis argumenta superesseprehendi, quæ, si pro eorum dignitate pertractata Sectionibus hisce adjunxissem, non parùm & meis laboribus ornamenti, & tuis fortè studiis adjumenti commodiquè attulissent; sed tam labor quam opus in immensum accrevisset. Quocirca cum inter alia, præcedentibus Sectionibus pertractata, modum, quo, elegantiores & sublimiores quædam Propositiones, partim ab Antiquis, partim à præstantissimis hujus sæculi Mathematicis ingeniosissimè inventæ, ab ipsis investigatæ fuerint, illævé Analyticæ artis præsidio inveniri possint, ostenderim: haud alienum ab instituto judicavi, si, ad uberiolem hujus artis usum, ea, quæ Nobilissimus atque Clarissimus D. CHRISTIANUS HUGENIUS nuper de Ratiociniis in aleæ ludo adinvenit mihi què conscripta communicavit, hîc unà cum ipsius literis, reliquorum, quæ mihi supersunt, loco, adjicerem.

T t t 3

Quem

Quem igitur illius tractatum vel eò tibi acceptiorem fore confido, quò ea quæ inibi traduntur & subtiliora & à vulgo remotiora esse invenies; præsertim cum ad horum investigationem eadem mecum Analyfi, cujus olim fundamenta à me edoctus est, utatur; atque ita ejus studiosis viam ad consimiles quæstiones resolvendas aperiat. In quibus si cum reliquis nostris laboribus amplam tibi satis, Benevole Lector, in hoc studiorum genere exercitationis ansam præbuisse videar; animum exinde meum tui studiosissimum (ut spero) agnosces, ac nostram proinde operam in tui & Reipublicæ Literariæ bonum susceptam in bonam partem interpretaberis. Vale.

## CHRISTIANUS HUGENIUS

Clarissimo Viro,

D. FRANCISCO SCHOTENIO

S. D.



*Um in editione elegantissimorum ingenii tui monumentorum, quam prae manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter caetera te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quam latè se protendat divina Analytices scientia, facile intelligo etiam illa plurimum proposito tuo inseruire posse, quae de alea ratiociniis conscripsimus; quanto enim minus rationis terminis comprehendi posse videbantur, quae fortuita sunt atque incerta, tanto admirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda susceperim, tuque digna existimes, qua simul cum subtilissimis tuis inventis in lucem exeant, adeò tibi non refragabor, ut etiam è re mea esse existimem hæc potissimum ratione ipsa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocasse videri alioquì possem, non tamen prorsus utilitatis expers ac nullius pretii censebitur, quòd tu veluti inter tua adoptaveris, nec sine multo labore è vernacula lingua nostra in Latinam converteris. Quanquam, si quis penitius ea quae tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus sit rem non ut videtur ludicram agi, sed pulchra subtilissimaque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quae in hoc genere proponuntur, nihilo minus profunda indaginis visum iri confido, quàm quae Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquantò plus habitura, cum non, sicut illa, in nuda numerorum consideratione terminentur. Sciendum verò, quòd jam pridem inter præstantissimos totà Gallià Geometras*

*metras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi prima inventionis gloriam hac in re tribuat. Ceterum illi, difficillimis quibusque questionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinere, adeo ut à primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in resolvendis Problematibus pulchrè nobis convenire saepe numero expertus sum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidisse me invenies, omissa tamen analysi, cum quòd prolixam nimis operam poscebant, se perspicuè omnia exequi voluissem, tum quòd relinquendum aliquid videbatur exercitationi nostrorum, si qui erunt, Lectorum. Vale.*

Dat. Hagæ Com.  
27 Apr. 1657.



D E  
R A T I O C I N I I S  
I N  
L U D O A L E Æ.

**D**E lusionum, quas sola fors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculoque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrum prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti expectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum relinquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumera questiones exoriri possunt inter duos, tres, pluresve collatores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse cuiusque sortem seu expectationem ad ali-

quid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, si quis me incio alterâ manu 3 solidos occulter, alterâ 7 solidos, mihi quæ optionem det ex utra manu solidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuo eò pervenire possum, ut æquam expectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: id quæ æquolusu contendens.

### PROPOSITIO I.

Si  $a$  vel  $b$  expectem, quorum utrumvis æquè facile mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere  $\frac{a+b}{2}$ .

Ad hanc regulam non solum demonstrandam, verum etiam primitus eruendam posito  $x$  pro eo quod æquivaler expectationi meæ; oportet me, quum  $x$  habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque lus esse talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quisque deponat  $x$ , ac ut victor victo traditurus sit  $a$ . Hic autem lus justus est, & patet me hâc ratione æquam habere sortem ad obtinendum  $a$ , si lusum perdam scilicet; aut  $2x - a$ , si vincam: tum enim obtineo  $2x$ , id nempe quod depositum est, de quo alteri erogandum est  $a$ . Quod si autem  $2x - a$  tantundem valeret atque  $b$ , æqua mihi fors obtingeret ad  $a$  quàm ad  $b$ . Pono itaque  $2x - a = b$ , & fit  $x = \frac{a+b}{2}$ , pro valore meæ expectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens  $\frac{a+b}{2}$  possum cum alio certare, qui etiam  $\frac{a+b}{2}$  deponere volet, hâc conditione ut vincens victo sit traditurus  $a$ . Quâ ratione similis expectatio mihi obtinget ad obtinendum  $a$ , si perdam, aut ad obtinendum  $b$ , si vincam; tum enim obtineo  $a + b$  id nempe quod depositum est, alterique inde concedo  $a$ .

In numeris. Si ad 3 vel 7 æquâ fors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propositionem valet 5; & certum est me 5 habentem rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille similiter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri sit daturus 3: erit hic lus omnino justus, & patet

tet mihi æquam obtingere sortem ad obtinendum 3, si perdam, aut 7, si vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

## PROPOSITIO II.

Si  $a, b$ , vel  $c$  expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere possit, expectatio mea æstimanda est  $\frac{a+b+c}{3}$ .

Ad quod rursus inveniendum, ponatur, ut ante,  $x$  pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cum  $x$  habeo, ad eandem expectationem pervenire posse justo lusu. Ponatur lusus esse talis, ut cum duobus aliis ludam hæc conditione, ut quisque nostrum trium deponat  $x$ , & ut cum uno hoc pactum aggrediar, si ipse victor evadat, mihi sit daturus  $b$ , & ego ipsi traditurus sum  $b$ , si idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludam vincens mihi traditurus sit  $c$ , aut ego ipsi sum daturus  $c$ , si ego vincam. Et patet hunc ludum justum esse. Æquam autem hæc ratione sortem habebō ad obtinendum  $b$ , si nimirum primus vincat, aut  $c$ , si secundus vincat, aut etiam  $3x - b - c$  si ego vincam; tunc enim obtineo  $3x$ , quod depositum est, de quo uni concedo  $b$ , & alteri  $c$ . Quod si  $3x - b - c$  æquale fuerit ipsi  $a$ , eadem mihi obtingeret expectatio ad obtinendum  $a$ , quæ ad  $b$ , aut ad  $c$ . Pono itaque  $3x - b - c = a$ , & fit  $x = \frac{a+b+c}{3}$ , pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, si ad  $a, b, c$ , aut  $d$  æqua fors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti  $\frac{a+b+c+d}{4}$ . Atque ita porrò.

## PROPOSITIO III.

Si numerus casuum, quibus mihi eveniet  $a$ , sit  $p$ , numerus autem casuum quibus mihi eveniet  $b$  sit  $q$ , sumendo omnes casus æquæ in proclivi esse: expectatio mea valebit  $\frac{pa+pq}{p+q}$ .

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rursus  $x$  pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cum  $x$  habeo, ad eandem expectationem pervenire posse, ut ante, justo lusu. Ad hoc autem tot collusiones sumam, ut unà mecum numerum ipsius  $p+q$  efficiant, quorum

deponat quisque  $x$ , ita ut depositum sit  $px + qx$ , & quisque sibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porro cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus  $q$ , sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi sit daturus  $b$ , aut ego contra ipsi idem  $b$ , si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, constituentibus  $p - 1$  sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus  $a$ , & ego tantundem (scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lusum hâc conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc  $q$  expectationis habere ad  $b$ , &  $p - 1$  expectationes ad  $a$ , & 1 expectationem (me nempe vincente) ad  $px + qx - bq - ap + a$ , tunc enim obtineo  $px + qx$ , id quod depositum est, de quo tradere debeo  $b$  unicuique  $q$  lusorum, &  $a$  unicuique  $p - 1$  lusorum, quæ simul conficiunt  $ab + pa - a$ . Si itaque  $qx + bx - bq - ap + a$  æquale esset ipsi  $a$ , haberem  $p$  expectationes ad  $a$ , (quandoquidem jam  $p - 1$  expectationes ad id habebam) &  $q$  expectationes ad  $b$ , & sic ad priorem meam expectationem rursus pervenissem. Quocirca porro  $px + qx - bq - ap + a = a$ , & fit  $x = \frac{ap + bq}{p + q}$ , pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusum justus est. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

## PROPOSITIO IV.

2 } Ut igitur ad primò propositam quæstionem veniamus, nimirum, de facienda distributione inter diversos collusores, quando eorum sortes inæquales sunt, opus est ut à facilioribus incipiamus.

1 } Sumpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depositum est, lucretur, & me jam bis vicisse, alterum verò semel. Scire cupio, si lusum prosequi non velimus, sed pecuniàm, de qua certamus, prout æquum est, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò considerare oportet lusus, qui utrobique deficiunt. Certum enim est, si inter nos convenerit, verbi gratià, ut quod depositum est lucretur is, qui priùs vigesies vicerit, & ego decies & novies vicerò, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo casu sortem meam quantò hîc melior est, ubi à tribus lussibus binos consequutus sum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo lusus sed ipse duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum est quid fieret, si in lusu pergeremus. Certum enim est, si primum ludum vincere, me præscriptum numerum impleturum & omne depositum consecuturum, id quod vocetur  $a$ . Quod si autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriusque fors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique  $\frac{1}{2}a$ . Manifestum autem est me æquam habere sortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua sit expectatio ad obtinendum  $a$  aut  $\frac{1}{2}a$ : quod ipsum per 1.<sup>mam</sup> Propositionem tantum est ac si utriusque sortis dimidium, id est,  $\frac{3}{4}a$ , haberem; & relinquitur alteri meo collusori  $\frac{1}{4}a$ , quæ ipsius portio statim ab initio eodem modo reperiri potuisset. Unde patet, eum, qui ludum meum in se recipere vellet, mihi  $\frac{3}{4}a$  pro eo tradere debere; ac proinde semper tria contra unum deponere eum posse, qui unum ludum vincere contendat, priusquam alter duos vincat.

## PROPOSITIO V.

Ponamus unum mihi deficere ludum & collusori meo tres lusus. Oportet hîc facere distributionem.

DE RATIOCINIIS

## PROPOSITIO VIII.

Nunc verò ponamus tres esse collusores, quorum primo ut & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusui.

Ut igitur inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse vel alter reliquorum duorum primum lusum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id quod sit  $a$ . Quod si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideóque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur  $\frac{1}{3}a$ . Et fit primo una expectatio ad  $a$ , una ad  $0$ , & una ad  $\frac{1}{3}a$ , (quandoquidem æquè facile contingere potest cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet ac  $\frac{4}{9}a$ , per 2<sup>d</sup>am Propositionem. Et fit similiter secundo  $\frac{4}{9}a$ , & remanet tertio  $\frac{1}{9}a$ . Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

## PROPOSITIO IX.

Ut tot collusorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores lusui deficiunt, cuiusque pars inveniatur, considerandum est, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quislibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Horum autem partes si in unam summam colligantur, & aggregatarum per numerum collusorum dividatur, quotiens ostendet unius quæsitam partem.

Ponamus tres esse collusores A, B, & C, & ipsi A unum ludum deficere, ipsi B duos lusui, & ipsi C similiter duos lusui. Invenire oportet, quid ipsi B, ejus quod depositum est, debeatur. Id quod vocetur  $q$ .

Primò examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipse, vel A, vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur  $0$ . Si ipse B vinceret, deficeret illi adhuc unus lusus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusui. Quocirca ipsi B hoc in casu deberetur  $\frac{4}{9}q$ , per 8<sup>v</sup>am Propositionem.

Denique si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A & C sin-

ven heler d  
tot  
ae



Quod ad tesseras attinet, de iis hæ quæstiones proponi possunt: videlicet, quotâ vice unâ tessera senarium jacere periclitandum sit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quotâ vice duos senarios duabus tesserais, aut tres senarios tribus tesserais jacere sit tentandum. Et plures aliæ hujusmodi quæstiones.

Ad quas solvendas advertendum est. Primò unius tesserae sex esse jactus diversos, quorum quivis æquè facillè eveniat. Sumo enim tesseram habere figuram cubi perfectam. Porrò duarum tesserarum 36 esse diversos jactus, quorum similiter quivis æquè facillè obtingere potest. Nam ratione cujusque jactus unius tesserae potest unus sex jactuum alterius tesserae simul contingere. Et sexies 6 efficiunt 36 jactus. Item trium tesserarum esse 216 jactus diversos. Nam ratione cujusque 36 jactuum duarum tesserarum potest unus sex jactuum, qui in 3<sup>tiâ</sup> sunt, evenire. Et sexies 36 efficiunt 216 jactus. Eodem modo patet, quatuor tesserarum jactus esse sexies 216, id est, 1296; atque sic ulterius jactus quotlibet tesserarum supputari posse, sumendo semper pro accessione unius tesserae sexies jactus præcedentis.

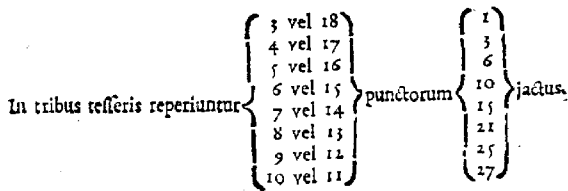
Porrò notandum, duarum tesserarum unum duntaxat esse jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim tesseras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri posse. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B sex, vel in A sex & in B quinque puncta patere posse. Quatuor punctorum tres sunt jactus, videlicet, ipsius A 1 & B 3 puncta; vel ipsius A 3 & B 1 punctum; vel ipsius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum similiter tres sunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4<sup>o</sup> sunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5<sup>que</sup> sunt jactus.

Septem punctorum 6 sunt jactus.



## . P R O P O S I T I O X .

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut unâ tesserâ 6 puncta jaciât.

Si quis primâ vice senarium jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depositum est; quinque. verò esse casus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipsum, & tantum unus pro ipso. Quod autem depositum est vocetur  $a$ . Est itaque ipsi unica expectatio ad obtinendum  $a$ , sed quinque ad obtinendum 0; id quod per 2<sup>dam</sup> Propositionem tantundem valet ac  $\frac{1}{6}a$ . Et manet pro eo qui ipsi hunc casum offert  $\frac{5}{6}a$ . Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere possit, qui primâ vice suscipere velit.

Qui duabus vicibus semel senarium jacere certet, fors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciât, obtinet  $a$ . Si diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum  $\frac{1}{6}a$ . Atqui ut primâ vice 6 jaciât, unus tantum casus est, & quinque casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi  $a$ ; & quinque qui dent  $\frac{1}{6}a$ , id quod per 2<sup>am</sup> Propositionem valet  $\frac{1}{6}a$ . Unde contracertanti lusori cedit reliquum  $\frac{5}{6}a$ ; ad eò ut fors utriusque sive æstimatio expectationis eam servet rationem, quam 11 ad 25; id est minus quam 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo subducitur, quòd fors ejus, qui tribus vicibus semel senarium jacere suscipit, sit futura  $\frac{91}{216}a$ ; ita ut 91 contra 125 deponere possit; id est, paulò minus quam 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem suscipit, fors ejus est  $\frac{671}{1296}a$ ; ita ut 671 contra 625 deponere possit; id est, plus quam 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem suscipit, fors ejus est  $\frac{4651}{7776}a$ , & potest 4651 contra 3125 deponere; id est, paulò minus quam 3 ad 2.

Qui sex vicibus idem suscipit, fors ejus est  $\frac{31031}{46656}a$ , & potest 31031 contra 15625 deponere; id est, paulò minus quam 2 ad 1.

Atque ita consequenter quilibet jactuum numerus inveniri potest. Sed licet majori compendio progredi, ut in sequenti Propositione ostendetur; sine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

## PROPOSITIO XI.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut duabus tesseris 12 puncta jaciatur.

Si quis primâ vice duos senarios jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, id est, ad obtinendum 4; & 35 esse casus, quibus perdat sive nihil habeat, quoniam 36 sunt jactus. Itaque habet, per 2<sup>dâ</sup> Propositionem,  $\frac{1}{36}4$ .

Qui duabus vicibus idem suscipit, si primâ vice duos senarios jaciatur, obtinebit 4; si verò primâ vice diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, id quod ipsi, per illud quod jam dictum est, valet  $\frac{1}{36}4$ .

Atqui ut primâ vice duos senarios jaciatur, unus tantum est casus, sed 35 casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi 4, & 35 qui dent  $\frac{1}{36}4$ ; id quod per 2<sup>dâ</sup> Propositionem valet  $\frac{71}{1296}4$ . Et remanet contracertanti  $\frac{1225}{1296}4$ .

Ex his invenire licet, qualis sit ei fors aut pars, qui idem suscipit quaternis jactibus, prætereundo casum eum, cum quis illud ternis jactibus suscipit.

Etenim, qui 4<sup>or</sup> vicibus duos senarios jacere contendit, si illud 1<sup>ma</sup> aut 2<sup>dâ</sup> vice faciat, obtinet 4; sin minus, restant ipsi duo jactus, qui per illud quod superius dictum est, valent  $\frac{71}{1296}4$ . Sed propter eandem rationem habet etiam 71 casus, ut ex duobus primis jactibus semel duos senarios jaciatur, contra 1225 casus, quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio 71 casus, qui ipsi dent 4, & 1225 casus, qui dent ipsi  $\frac{71}{1296}4$ . Quod ipsi per 2<sup>dâ</sup> Propositionem valet  $\frac{178991}{1679616}4$ . Et remanet contracertanti  $\frac{1500625}{1679616}4$ . Id quod ostendit eorum sortes esse ad se invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porro eadem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus semel duos senarios jacere certat. Ac inde rursus expectatio ejus, qui idem suscipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui istud 8 vicibus suscipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in se recipit. In qua operatione, quoniam præcipue quæritur in quo numero jactuum æqualis fors incipiat, inter eum qui id suscipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immensum excrescerent, posteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus suscipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiore conditionem inire, cum 25 jactibus aggreditur.

## PROPOSITIO XII.

Invenire quot tesseris suscipere quis possit, ut primâ vice duos senarios jaciatur.

Hoc autem tantundem est, ac si quis scire velit, quoto jactu quispian unâ tesserâ suscipere possit, ut bis senarium jaciatur. Quod si quis duobus jactibus suscipere, obtingeret ei, per ea quæ ante ostensa sunt,  $\frac{1}{3}a$ . Qui illud tribus jactibus in se reciperet, si primus ejus jactus senarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque senarius esse deberet, id quod tantundem valere dictum est ac  $\frac{1}{3}a$ . At verò primo ejus jactu existente senario, opus est ut ex duobus jactibus non nisi semel senarium jaciatur. Quod per 10 Propositionem tantundem valet ac si  $\frac{1}{3}a$  haberet. Atqui certum est ipsum unum habere casum, quo primâ vice senarium jaciatur, & quinque casus quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio unum casum ad  $\frac{1}{3}a$ , & 5 casus ad  $\frac{1}{3}a$ , id quod per 2<sup>da</sup> Propositionem tantundem valet ac  $\frac{1}{3}a$  seu  $\frac{1}{3}a$ . Hoc pacto assumendo continuè unum jactum amplius, invenitur 10 jactibus unâ tesserâ, aut 10 tesseris primo jactu suscipi posse, ut duo senarii jaciatur, idque cum lucro.

## PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus tesseris unum solummodo jactum, hâc conditione, ut, si septenarius eveniat, ego vincam; at ille, si denarius obtingat; si verò quidquam aliud accidat, ut tum id quod depositum est æqualiter dividamus: Invenire qualis istius pars cuique nostrum debeat.

Quoniam 36 jactuum, qui duabus tesseris proveniunt, 6 jactus existunt septem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, restant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare possunt; id quod si fiat, cuique nostrum debebitur  $\frac{2}{3}a$ . Verùm si id non obtingat, habebō 6 casus, quibus vincam, id est, ut  $a$  habeam; & 3 casus, quibus diversum eveniat, nihilque habeam: id quod per 2<sup>da</sup> Propositionem tantundem est ac si tali casu  $\frac{2}{3}a$  haberem. Habeo itaque ab initio 27 casus ad  $\frac{1}{2}a$  & 9 casus ad  $\frac{2}{3}a$ , id quod, per 2<sup>dam</sup> Propositionem, tantundem est ac  $\frac{1}{2}a$ . Et remanet contracertanti  $\frac{1}{2}a$ .

P R O

PROPOSITIO XIV.

Si ego & alius duabus tesseriis alternatim jaciamus, hęc conditione, ut ego vincam simul atque septenarium jaciā, ille verò quā primū senarium jaciāt; ita videlicet, ut ipsi primū jactum concedam: Invenire rationem meā ad ipsius sortem.

Ponatur, sortem meam valere  $x$ , & id quod depositum est vocari  $a$ ; eritque fors alterius  $a-x$ . Et patet, quādoque ipsius vices jaciendi revertuntur, sortem meam tum rursus debere esse  $x$ . At quādoque meā vices sunt ut jaciā, fors mea pluris æstimanda est. Ponatur itaque pro ejus valore  $y$ . Iam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 tesseriis, qui collusori meo senarium dare lususque victorem reddere possunt; & 31 jactus, quibus diversum eveniat, id est, qui meas jaciendi vices promovent: habeo, priusquam jacit, 5 casus ad obtinendum 0, & 31 casus ad obtinendum  $y$ . id quod per 3<sup>tiā</sup> Propositionem valet  $\frac{31y}{36}$ . Posuimus autem casum meum à principio esse  $x$ . Quocirca erit  $\frac{31y}{36} = x$ , adeoque  $y = \frac{36x}{31}$ . Deinde positum fuit, vicibus meis venientibus, sortem meam valere  $y$ . Ego verò jacturus, habeo 6 casus ad obtinendum  $a$ , quādoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 casus, quibus vices collusoris mei revertuntur, id est, ut mihi obtineam  $x$ . id quod per 3<sup>tiā</sup> Propositionem valet  $\frac{6a+30x}{36}$ . Hoc autem cum sit  $y$ , erit, invento, ut ante,  $\frac{36x}{31} = y$ ,  $\frac{30x+6a}{36} = \frac{36x}{31}$ . Unde invenitur  $x = \frac{31a}{61}$ , valor meæ fortis. Et per consequens collusoris mei erit  $\frac{30a}{61}$ ; ita ut ratio fortis meæ ad illius sortem sit, ut 31 ad 30.

Coronidis loco subjungantur sequentia Problemata.

A & B unā ludunt duabus tesseriis, hęc conditione, ut A vincat, si *Probl. 1.* senarium jaciāt, at B si septenarium jaciāt. A primò unum jactum instituet; deinde B duos jactus consequenter; tum rursus A duos jactus, atque sic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Queritur ratio fortis ipsius A ad sortem ipsius B? Resp. ut 10355 ad 12276.

*Probl. 2.* Tres collusores A, B & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes A, secunda penes B, & tertia penes C, & tum sequens rursus penes A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

*Probl. 3.* A certat cum B quòd ipse ex 40 chartis lusoriis, id est, 10 cujusque speciei, 4 chartas extracturus sit; ita ut ex unaquaque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A ad sortem B ut 1000 ad 8139.

*Probl. 4.* Assumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

*Probl. 5.* A & B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseriis hâc conditione: ut, si 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipsi B; at si 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipsi A; & ut ille ludum victurus sit, qui primum omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244140625 ad 282429536481.

F I N I S.

