Appendix: Basiskennis matrixalgebra

Vectoren en matrices

Vectoren en matrices zijn verzamelingen getallen die op een bepaalde manier *geordend* zijn. Een vector bestaat uit een aantal getallen die in een bepaalde volgorde boven of naast elkaar staan. Als de getallen naast elkaar staan spreken we van een *rijvector*, staan ze boven elkaar dan heet zo'n vector een *kolomvector*. De verzameling [3 5 2] is dus een rijvector terwijl

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

een kolomvector is. Bovenstaande vectoren bestaan elk uit drie getallen, drie *elementen*.
Vectoren worden aangeduid door middel van kleine, vetgedrukte letters. Om aan te geven dat het om een rijvector gaat zet men een accentteken achter die letters, bij een kolomvector gebeurt dat niet. De rijvector **b'** = [3 5 2] bestaat uit de elementen 3, 5 en 2 die we aanduiden met de symbolen b_1, b_2 en b_3. Ook de elementen van een kolomvector **b** worden op die manier aangeduid. Uit de context moet dan steeds blijken of het om elementen van een rij- of van een kolomvector gaat.
Een matrix is een verzameling getallen die zowel naast elkaar als boven elkaar staan. De elementen van een matrix zijn geordend in *rijen* en *kolommen*; de elementen in de rijen staan naast elkaar, de elementen in de kolommen staan onder elkaar. Bijvoorbeeld: de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

heeft drie rijen en vier kolommen; we spreken dan van een matrix van de orde 3 bij 4 (met afmetingen 3×4). Meestal geven we het aantal rijen aan met het symbool *n* en het aantal kolommen aan met *m*. We kunnen bovenstaande matrix opvatten als een verzameling van vier naast elkaar geplaatste kolommen of als een verzameling van drie onder elkaar staande rijen. Omgekeerd kan men een rijvector opvatten als een matrix met één rij en *m* kolommen; een kolomvector komt overeen met een matrix met *n* rijen en één enkele kolom. Een matrix wordt symbolisch aangeduid met een vetgedrukte hoofdletter. De elementen van een matrix, bijvoorbeeld de 3×4 matrix **A**, worden aangeduid met behulp van *subscripten* ($a_{11}, a_{12}, ..., a_{ij}, ..., a_{nm}$):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Het eerste subscript geeft aan in welke rij het element staat, het tweede subscript geeft de bijbehorende kolom aan. De *i*-de rij van matrix **A** wordt aangeduid als $\mathbf{a}_i$', de *j*-de kolom als $\mathbf{a}_j$.
Matrices kunnen *getransponeerd* worden. Dat wil zeggen dat de rijen en kolommen van de matrix omgewisseld worden; de matrix wordt als het ware gespiegeld. Een matrix met drie rijen en vier kolommen wordt door transponeren omgezet in een matrix met vier rijen en drie kolommen. Wat in de oorspronkelijke matrix element (*i*, *j*) was wordt in de getransponeerde matrix element (*j*, *i*). De getransponeerde van een matrix **A** wordt aangeduid met het symbool **A'**. Bijvoorbeeld: de getransponeerde van de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{is gelijk aan } \mathbf{A'} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 9 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ook vectoren kunnen getransponeerd worden: een rijvector wordt daardoor een kolomvector, en een kolomvector wordt getransponeerd in een rijvector. Dus (**b**')' = **b** en (**a**)' = **a'**. Als een kolomvector *m* elementen heeft dan kunnen we hem voorstellen als een $m \times 1$ - matrix. Door hem te transponeren maken we er een $1 \times m$ -matrix van, dat wil zeggen, een rijvector.
Matrices kunnen *vierkant* zijn; ze hebben dan evenveel rijen als kolommen. Als een matrix vierkant is kan hij *symmetrisch* zijn of niet. Een matrix **A** is symmetrisch als voor elke element a_{ij} geldt dat $a_{ij} = a_{ji}$. Voor een symmetrische matrix gaat dus altijd op dat **A** = **A'**.

Rekenen met matrices en vectoren

Optellen van één getal

Met matrices en vectoren kunnen allerlei rekenkundige bewerkingen worden uitgevoerd. De simpelste is het optellen (of aftrekken) van één constant getal (een zogenaamde *scalair*) bij alle elementen van een vector of matrix. Tellen we het getal k op bij de rijvector **b'** dan ontstaat een nieuwe rijvector **c'** = **b'** + k met elementen $[(b_1 + k)\ (b_2 + k)\ (b_3 + k)]$. Bijvoorbeeld: [3 5 2] + 4 = [7 9 6]. Analoog geeft optelling van k bij kolomvector **b** een nieuwe kolomvector **c** = **b** + k. Bij optelling van k bij matrix **A** krijgen we **D** = **A** + k. Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} ; \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} + (-3) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Vermenigvuldigen met één getal

Vectoren en matrices kunnen ook met één constant getal, zeg r, vermenigvuldigd worden: alle elementen van de vector of matrix worden dan r keer zo groot. We schrijven bijvoorbeeld: **g'** = **b'**r = r**b'**, **g** = **b**r = r**b** en **H** = **A**r = r**A**. Voorbeelden zijn: [3 5 2] × 2 = [6 10 4] en

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} ; \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times (-1/3) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & -3 & -2 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

Optellen van vectoren

Twee of meer vectoren kunnen bij elkaar opgeteld worden als zij allemaal hetzelfde aantal elementen hebben en allemaal rij- of allemaal kolomvectoren zijn. De rijvector **d'** = **b'** + **c'** heeft naast elkaar staande elementen $[(b_1 + c_1)\ (b_2 + c_2)\ \ldots\ (b_j + c_j)\ \ldots\ (b_m + c_m)]$. Zijn **b** en **c** kolomvectoren dan krijgen we **d** = **b** + **c** met bovengenoemde elementen onder elkaar. Bijvoorbeeld: [3 5 2] + [7 9 6] = [10 14 8] en

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Optellen van matrices

Ook matrices kunnen bij elkaar opgeteld (en van elkaar afgetrokken) mits ze allemaal dezelfde aantallen rijen en kolommen hebben. Een $n \times m$ - matrix kunnen we wel optellen bij een andere $n \times m$ - matrix maar niet bij een $m \times n$ - matrix, tenzij we die laatste matrix eerst zouden transponeren. De matrix-optelling **C** = **A** + **B** levert een matrix **C** op waarvan de elementen c_{ij} gelijk zijn aan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 10 & 8 \\ 12 & 5 & 8 & 17 \\ 4 & 3 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vermenigvuldigen van vectoren

In tegenstelling tot wat men misschien zou verwachten, worden bij het vermenigvuldigen van twee vectoren de getallen van die vectoren niet zomaar elementsgewijs vermenigvuldigd. Voor het vermenigvuldigen van vectoren gelden ingewikkelder regels. De eerste is dat men alleen rijvectoren met kolomvectoren kan vermenigvuldigen of kolomvectoren met rijvectoren. Bovendien maakt het uit welke vector in de vermenigvuldiging vooropstaat: **a'b** geeft een volstrekt ander resultaat dan **ba'** en ook **ab'** en **b'a** verschillen volledig van elkaar. In het geval **a'b** zegt men dat de kolomvector **b** wordt *voorvermenigvuldigd* met de rijvector **a'** of dat de rijvector **a'** wordt *navermenigvuldigd* met de kolomvector **b**.

Om een rijvector te kunnen navermenigvuldigen met een kolomvector moeten beide vectoren hetzelfde aantal elementen hebben. Het product **b'c** dat ontstaat door een rijvector **b'** met *m* elementen na te vermenigvuldigen met een kolomvector **c** die ook *m* elementen heeft, levert *één getal p* op dat gedefineerd is als

$$p = \sum_{j=1}^{m} b_j c_j .$$

Zouden we **c'** navermenigvuldigen met **b** (merk op: de vectoren **b'** en **c** zijn getransponeerd) dan krijgen we natuurlijk hetzelfde product

$$p = \sum_{j=1}^{m} b_j c_j .$$ Bijvoorbeeld:

$$[3\ \ 5\ \ 2] \times \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = [4\ \ 7\ \ 3] \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 5 \times 7 + 2 \times 3 = 53.$$

Het vermenigvuldigen van een rijvector met een kolomvector levert dus een *lineaire combinatie*, een *gewogen som* op, waarbij de elementen uit de ene vector gewogen worden met de elementen uit de andere.

Als een kolomvector **g** met *n* elementen *navermenigvuldigd* wordt met een rijvector **h'**, dan hoeft **h'** niet evenveel elementen te hebben als **g**. Als **h'** *m* elementen heeft, dan bestaat het product **gh'** uit een *matrix* met *n* rijen en *m* kolommen. Noemen we die matrix **P**, dan is element p_{ij} gelijk aan $p_{ij} = g_i h_j$.

Vermenigvuldigen we kolomvector **h** na met rijvector **g'**, dan krijgen we als product **hg'** een matrix met *m* rijen en *n* kolommen. Het element in de *j*-de rij en de *i*-de kolom van die productmatrix is dan gelijk aan $h_j g_i$ waaruit volgt dat **gh'** = (**h'g**)' = **P'**. Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times [4\ \ 5] = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 20 & 25 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times [3\ \ 5\ \ 2] = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 8 \\ 15 & 25 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vermenigvuldigen van een matrix met een vector

De manier waarop een matrix en een vector met elkaar vermenigvuldigd kunnen worden, hangt enerzijds af van de vraag of de vector een rij- of een kolomvector is en anderzijds van de afmetingen van de matrix en de vector. Is de vector een kolomvector, zeg **g**, dan kan een matrix **A** met deze vector alleen worden *navermenigvuldigd*. Bovendien moet het aantal elementen van de kolomvector **g** gelijk zijn aan het aantal kolommen van de matrix **A**. Dus: alleen als **A** afmetingen $n \times m$ heeft en **g** uit m elementen bestaat, kan het product **Ag** berekend worden. Om na te gaan hoe dat product er uitziet moet men bedenken dat de $n \times m$ matrix **A** op te vatten is als een verzameling van n boven elkaar liggende rijvectoren. In de vorige paragraaf hebben we gezien dat het product van een rijvector die met een kolomvector wordt navermenigvuldigd uit één enkel getal bestaat. Daarom bestaat het product **p** = **Ag** uit een *kolomvector* met als elementen de producten $\mathbf{a_i}'\mathbf{g}$ (in somnotatie: $p_i = \sum_j a_{ij} g_j$). Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3\times 2)+(1\times 1)+(9\times 3)+(6\times 4) \\ (5\times 2)+(2\times 1)+(7\times 3)+(8\times 4) \\ (2\times 2)+(1\times 1)+(4\times 3)+(2\times 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 65 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

De $(n \times m)$-matrix **A** kan alleen met een vector worden *voorvermenigvuldigd* als die vector een rijvector (bijvoorbeeld **h'**) is, met evenveel elementen als **A** rijen heeft. Het product **q'** = **h'A** bestaat dan uit een *rijvector* met m elementen (het aantal kolommen van **A**). Het j-de element van de rijvector **q'** bestaat uit het vectorproduct $q_j = \mathbf{h}'\mathbf{a_j}$ (in somnotatie: $q_j = \sum_i h_j a_{ij}$). Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} &[2\ \ 1\ \ 3] \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \Big[\big((2\times 3)+(1\times 5)+(3\times 2)\big) \quad \big((2\times 1)+(1\times 2)+(3\times 1)\big) \\ &\quad \big((2\times 9)+(1\times 7)+(3\times 4)\big) \quad \big((2\times 6)+(1\times 87)+(3\times 2)\big)\Big] \\ &= [17\ \ 7\ \ 37\ \ 26]. \end{aligned}$$

Het vermenigvuldigen van matrices met elkaar

Ook voor matrices maakt het uit of we een bepaalde matrix, **A**, vóór- of navermenigvuldigen met een tweede matrix, zeg **B**. Uit het voorgaande volgt dat **A** alleen dan met **B** kan worden navermenigvuldigd als het aantal kolommen van **A** even groot is als het aantal rijen van **B**. Alleen dan kan het product **C** = **AB** berekend worden. Dus: een $(n \times m)$-matrix kan aleen vermenigvuldigd

worden met een $(m \times p)$-matrix. Het resultaat, **C**, is een matrix met n rijen en p kolommen, waarbij het er verder niet toe doet welke waarden n en p precies hebben. Men schrijft ook wel eens: $\mathbf{C}_{n\times p} = \mathbf{A}_{n\times m}\mathbf{B}_{m\times p}$.
Om een matrix **A** met een matrix **G** te kunnen voorvermenigvuldigen moet **G** hetzelfde aantal kolommen hebben als **A** rijen heeft. Als **A** een $(n \times m)$- en **G** een $(q \times n)$-matrix is, is het product **D** = **GA** een $(q \times m)$-matrix. Een element d_{ij} van **D** is zelf het product van twee vectoren, namelijk van de i-de rij van **G** en de j-de kolom van **A**: $d_{ij} = \mathbf{g}_i\text{'}\mathbf{a}_j$

(in somnotatie: $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}a_{kj}$).

Analoog geldt voor **C** = **AB** dat $c_{ij} = \mathbf{a}_i\text{'}\mathbf{b}_j$ (in somnotatie: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$).

Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \big((1\times 1)+(2\times 5)+(3\times 4)\big) & \big((1\times 3)+(2\times 2)+(3\times 6)\big) \\ \big((4\times 1)+(5\times 5)+(6\times 4)\big) & \big((4\times 3)+(5\times 2)+(6\times 6)\big) \\ \big((7\times 1)+(8\times 5)+(9\times 4)\big) & \big((7\times 3)+(8\times 2)+(9\times 6)\big) \\ \big((5\times 1)+(1\times 5)+(3\times 4)\big) & \big((5\times 3)+(1\times 2)+(3\times 6)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 25 \\ 53 & 58 \\ 83 & 91 \\ 22 & 35 \end{pmatrix}.$$

Voor de getransponeerde van de matrix **C** = **AB** geldt dat **C’** = **B’A’**, want alleen dan blijft de noodzakelijke overeenstemming tussen het aantal kolommen van de eerste en het aantal rijen van de tweede matrix gehandhaafd.
Uit het bovenstaande blijken een aantal eigenschappen die van belang zijn bij het vermenigvuldigen van matrices. In de eerste plaats: zelfs als de matrixvermenigvuldiging **C** = **AB** wél mogelijk is, hoeft het product **D** = **BA** niet *per se* ook mogelijk te zijn. Analoog: als **D** = **BA** mogelijk is, hoeft dat niet ook voor **C** = **AB** op te gaan. Als zowel **AB** als **BA** mogelijk zijn, moet gelden dat **A** een $(p \times q)$ en **B** een $(q \times p)$-matrix is. Want voor **AB** moet **B** hetzelfde aantal rijen hebben als **A** kolommen heeft en voor **BA** moet **B** hetzelfde aantal kolommen hebben als **A** rijen heeft.

BIJZONDERE VECTOREN EN MATRICES

Eenheidsvectoren

Een bijzondere vector is de zogenaamde *eenheidsvector*, een rij- of kolomvector waarvan alle elementen de waarde 1 hebben. Als we een $(n \times m)$-matrix **A** navermenigvuldigen met een eenheidsvector **u** die uit een kolom van m enen bestaat, krijgen we als resultaat een kolomvector met n getallen die gelijk zijn aan de sommen van de getallen in de rijen van **A**; de vermenigvuldiging **Au** is dus een manier om de kolommen van **A** bij elkaar op te tellen. Door voorvermenigvuldiging van **A** met een rij **u’** met n enen, krijgen we het product **u’A** dat bestaat uit een rijvector met de sommen van de getallen in de rijen van **A**. Dit is dus een manier om de rijen van een matrix bij elkaar op te tellen. Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+3+4 \\ 5+6+7+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$[1 \;\; 1] \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = [6 \;\; 8 \;\; 10 \;\; 12].$$

De identiteitsmatrix

Een bijzonder type matrices zijn de zogenaamde *diagonale matrices*. Dit zijn vierkante matrices die geheel uit nullen bestaan, behalve op de diagonaal van de matrix. De diagonaal van een vierkante matrix **D** wordt gevormd door de elementen $\{d_{ii}\}$, dat wil zeggen, de elementen waarvan het rijnummer gelijk is aan het kolomnummer. Een bijzonder geval van een diagonale matrix is de zogenaamde *identiteitsmatrix*, een diagonale matrix met alleen maar enen op de diagonaal. Voor deze matrix, die doorgaans met het symbool **I** wordt aangeduid, geldt voor elke matrix **A** dat **AI** = **IA** = **A**.

Singuliere-waardendecompositie

Volgens een stelling uit de lineaire algebra kan iedere willekeurige $(n \times m)$-matrix **G** ontbonden worden in het product van drie matrices: **G** = **PΛQ'**. Daarin heeft **P** de afmetingen $n \times m$, **Q** de afmetingen $m \times m$ en is Λ een $m \times m$ diagonale matrix. Voor **P** en **Q** geldt dat **PP'** = **P'P** = **QQ'** = **Q'Q** = **I**. Deze ontbinding van een willekeurige matrix **G** wordt *singuliere-waardendecompositie* (SVD; singular value decomposition) genoemd. **P** en **Q** zijn respectievelijk de linker en rechter eigenvectoren van **G**; Λ is de matrix van *singuliere waarden*. In een heleboel statistische en data-analytische technieken wordt van deze decompositiemethode gebruik gemaakt (zie bijvoorbeeld de hoofdstukken 5 en 7 van dit boek). Om een singuliere-waardendecompositie uit te voeren moet men gebruik maken van speciale computerprogramma's.

Eigenwaarden-eigenvectorendecompositie

Een speciaal geval van SVD doet zich voor als **G** vierkant en symmetrisch is. In dat geval is **P** = **Q** zodat **G** = **PΛP'**. Ook deze decompositiemethode wordt in veel data-analytische technieken toegepast (zie bijvoorbeeld Hoofdstuk 2). Ook voor eigenwaarden-eigenvectorenanalyse bestaan er speciale computerprogramma's.

Het delen van matrices door elkaar

In de matrixalgebra kunnen we niet zomaar schrijven $\mathbf{Q} = \mathbf{A}/\mathbf{B}$ of $\mathbf{R} = \mathbf{B}/\mathbf{A}$. Wat we (soms) wel kunnen schrijven is $\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ of $\mathbf{Q} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ of $\mathbf{R} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$ of $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Delen door **A** en **B** is hier dus vervangen door *vermenigvuldigen met de inverse van* **A** of de *inverse* van **B**. De inverse van een matrix, zeg **A**, is gedefinieerd als die matrix **S** die bij vermenigvuldiging met **A** de identiteitsmatrix oplevert. Dus: $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1}$, dat wil zeggen, de inverse van **A**, als en slechts dan als $\mathbf{SA} = \mathbf{AS} = \mathbf{I}$. Hierbij geldt dat alleen voor vierkante, symmetrische matrices in principe een inverse kan bestaan en dat niet alle symmetrische matrices ook inderdaad zo'n inverse hebben.
Een belangrijke stelling is dat de inverse van een vierkante, symmetrische matrix **S** bepaald kan worden uit de eigenwaarden en eigenvectoren volgens $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{P}'$. De matrix $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ is een diagonale matrix met op de diagonaal de inversen van de betreffende eigenwaarden van **S**. Als sommige van die eigenwaarden gelijk aan nul zijn, bestaat er geen inverse van **S**.
Er zijn verschillende manieren om een inverse te berekenen. Hoe dat precies gaat valt buiten het bestek van deze Appendix. Omdat die berekeningen tamelijk ingewikkeld zijn, zeker bij grote matrices, zal men daarvoor speciale computerprogramma's gebruiken. Alle bewerkingen die in deze Appendix aan de orde zijn gesteld, kunnen woerden uitgevoerd met behulp van de SPSS-module `MATRIX - END MATRIX` die in SPSS voor WINDOWS is opgenomen. Andere computerprogramma's waarmee matrixbewerkingen kunnen worden uitgevoerd zijn onder andere APL, MATLAB, MATHEMATICA, GAUSS en MAPLE.