

## — Varianten van ruimtelijke afbeeldingen

### 5.1 TRANSFORMATIES VAN RUIMTELIJKE AFBEELDINGEN

Meerdimensionale schaalmethoden leveren als resultaat een verzameling coördinaten op een aantal dimensies. Twee voorbeelden daarvan zijn besproken in Hoofdstuk 2, waarin we zagen hoe zogenaamde metrische MDS-analyses van de afstanden tussen acht Nederlandse steden een vrijwel perfecte kaart van Nederland opleverden. Hoewel: bij de oplossing uit het eerste voorbeeld moet men wel zijn hoofd scheef houden om meteen te zien dat die kaart vrijwel perfect is. Ook moet men zich realiseren dat de oorsprong van de kaart midden in Amsterdam ligt, wat voor landkaarten niet gebruikelijk is. Om echt een perfecte kaart te krijgen, zoals die in een atlas zou kunnen staan, moeten we de volgende drie bewerkingen uitvoeren:

(a) We moeten de oorsprong van de gevonden oplossing verplaatsen, (b) we moeten de kaart ongeveer een kwartslag naar rechts draaien, zodanig dat de lijn Den Haag - Arnhem nagenoeg horizontaal komt te lopen, en (c) we moeten de kaart ten slotte spiegelen om de horizontale as (daardoor komt Groningen boven en Eindhoven onder te liggen).

De technische termen voor het verschuiven van de oorsprong, het draaien en het spiegelen van de assen, zijn *translatie*, *rotatie* en *reflectie*. Hoewel deze bewerkingen nuttig kunnen zijn voor de herkenbaarheid (anders gezegd: de inhoudelijke interpretatie) van de kaart, hebben ze geen enkele invloed op de onderlinge afstanden tussen de steden op de kaart. Als de Euclidische afstandsmetrieek geldt, zijn translatie, rotatie en reflectie dus *afstandsbehoudende transformaties*.<sup>1</sup> Daarmee wordt bedoeld dat de verhoudingen van de – Euclidische

---

<sup>1</sup> Het is een beetje ongelukkig maar wel gebruikelijk dat de term *transformaties* in dit hoofdstuk gebruikt wordt om bewerkingen van coördinaten aan te duiden, terwijl deze term in de rest van dit boek meestal op veranderingen van geobserveerde nabijheidsdata betrekking heeft.

– afstanden in de getransformeerde configuratie niet anders zijn dan die in de ongetransformeerde ruimte. Als  $d_{ij}$  oorspronkelijk tweemaal zo groot is als  $d_{hk}$  dan geldt bij een afstandsbehoudende transformatie dat  $d_{ij}^* = 2d_{hk}^*$  (waarbij  $d^*$  de afstand na transformatie aanduidt).

Naast translatie, rotatie en reflectie zijn er in de Euclidische ruimte nog twee andere afstandsbehoudende transformaties: *centrale dilatie* en *permutatie*. Hieronder zullen al deze afstandsbehoudende transformaties behandeld worden, gevolgd door enkele transformaties die niet-afstandsbehoudend zijn. Deze bespreking volgt in grote lijnen de uiteenzetting van Young (1987).

## 5.2 AFSTANDSBEHOUDENDE TRANSFORMATIES

### Translatie

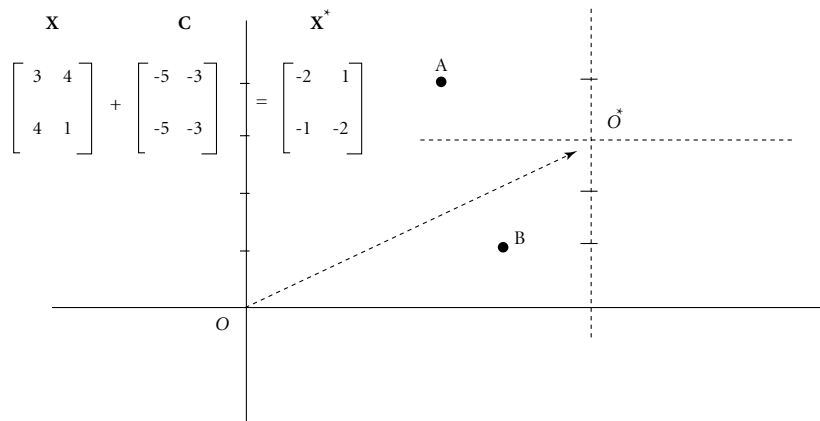
In grafisch opzicht komt deze manier van transformeren neer op het verschuiven van de oorsprong van het assenstelsel van een ruimte. Algebraïsch komt dit overeen met het optellen van een constant getal  $c_s$  bij de coördinaten op dimensie  $s$ , dus  $x_{is}^* = x_{is} + c_s$ . In matrixnotatie wordt dit

$$X^* = X + C \quad [5.1]$$

waarbij  $X$  de oorspronkelijke matrix met de coördinaten van  $m$  punten op  $r$  dimensies is.  $X^*$  is de matrix met coördinaten na translatie en  $C$  is een  $m \times r$ -matrix met in elk van de  $r$  kolommen een constant getal. Dat translatie afstandsbehoudend is, blijkt uit

$$d_{ij}^* = [\sum_s (x_{is}^* - x_{js}^*)^2]^{1/2} = [\sum_s (x_{is} + c_s - x_{js} - c_s)^2]^{1/2} = [\sum_s (x_{is} - x_{js})^2]^{1/2} = d_{ij}. \quad [5.2]$$

Een voorbeeld van een translatie is weergegeven in Figuur 5.1.



Figuur 5.1 Een voorbeeld van translatie

### Permutatie

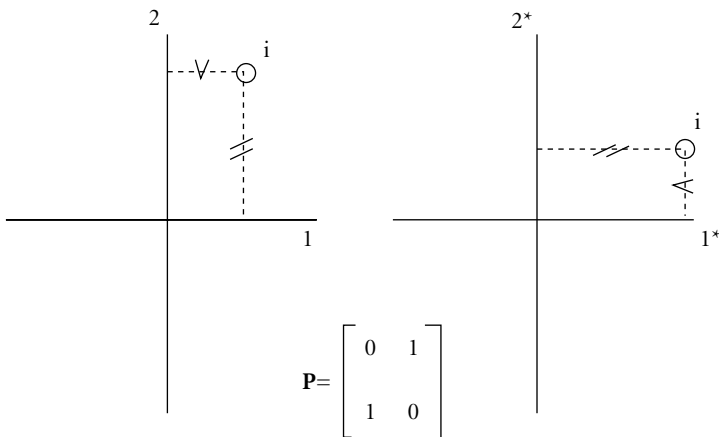
Permutatie is een transformatie die simpelweg neerkomt op het verwisselen van enkele of alle kolommen van de matrix  $X$ . Wat eerst de eerste dimensie was, wordt bijvoorbeeld de tweede of de derde, wat eerst de tweede was, wordt de eerste of een latere. Dus:  $x_{it}^* = x_{is}$  waarbij zowel  $t$  als  $s$  de (gehele) waarden 1 tot en met  $r$  kunnen aannemen. Deze transformatie is weer te geven door de matrixvermenigvuldiging

$$X^* = XP \quad [5.3]$$

waarin  $P$  een transformatiematrix is met  $r$  rijen en  $r$  kolommen. In iedere rij en iedere kolom van  $P$  staat slechts één 1; de rest van de cellen van  $P$  bestaat uit nullen. Als  $p_{hk} = 1$ , dan betekent dit dat de  $k$ -de kolom van  $X^*$  de coördinaten bevat van de  $h$ -de kolom van  $X$ . De permutatiematrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

heeft als effect dat de eerste kolom van  $X^*$  gelijk is aan de derde van  $X$ , dat de tweede kolom van  $X^*$  gelijk is aan de eerste kolom van  $X$ , en dat de derde kolom van  $X^*$  gelijk is aan de tweede kolom van  $X$ . Dat deze transformatie afstandsbehoudend is, is gemakkelijk in te zien omdat het in de optelling  $\sum_s (x_{is} - x_{js})^2$  niet uitmaakt in welke volgorde de gekwadrateerde verschillen op de dimensies bij elkaar worden opgeteld (de afstandsbehoudende eigenschap van permutaties geldt dus voor alle metrieke interdimensionaal additief zijn). Een voorbeeld van een permutatie staat in Figuur 5.2.



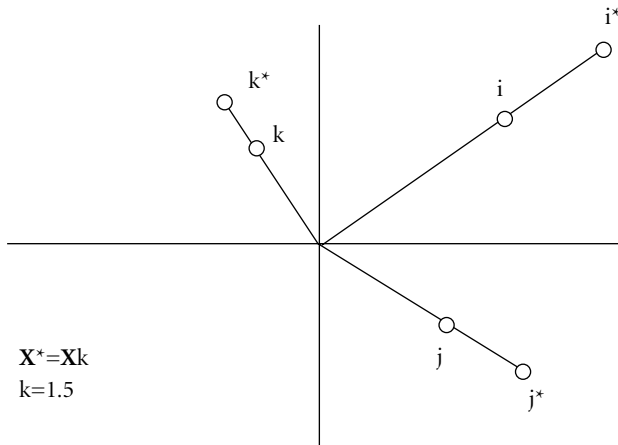
Figuur 5.2 Een voorbeeld van permutatie

### Centrale dilatie

Centrale dilatie komt er ruimtelijk op neer dat men alle assen van de ruimte in even sterke mate uitrekt of inkrimpt. Kortom: de configuratie wordt op een andere schaal afgebeeld. Algebraïsch betekent het dat *alle* coördinaten van  $X$  met dezelfde constante  $k$  vermenigvuldigd worden. Dus  $X^* = kX = Xk = XK$  waarin  $K (= kI = Ik)$  een  $r \times r$  diagonale matrix is met in alle cellen van de diagonaal de waarde  $k$  (buiten de diagonaal bevat  $K$  alleen nullen). De afstandsbehoudendheid blijkt uit

$$d_{ij}^* = [\sum_s (x_{is}^* - x_{js}^*)^2]^{1/2} = [\sum_s (kx_{is} - kx_{js})^2]^{1/2} = [k^2 \sum_s (x_{is} - x_{js})^2]^{1/2} = kd_{ij} \quad [5.4]$$

zodat  $d_{ij}^* : d_{hk}^* = d_{ij} : d_{hk}$ . Een voorbeeld van centrale dilatie is weergegeven in Figuur 5.3.



Figuur 5.3 Een voorbeeld van centrale dilatie

### Spiegeling

Bij spiegeling (reflectie) gaat het om een transformatie waarin de coördinaten in één of meer kolommen van  $X$  van teken worden veranderd. Dat betekent dus dat de configuratie als het ware op zijn kop wordt gezet, en/of dat links en rechts van de configuratie worden verwisseld. In formulevorm:

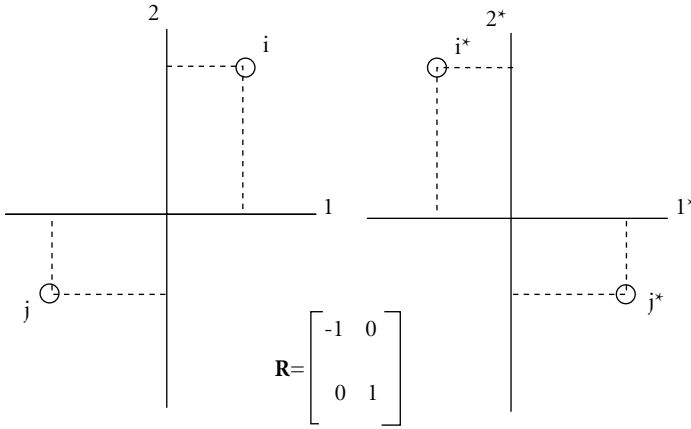
$$x_{is}^* = r_s x_{is} \quad [5.5]$$

met  $r_s = -1$  (de tekens worden verwisseld) of  $r_s = +1$  (dan gebeurt er niets). In matrixnotatie wordt dit weergegeven door

$$X^* = XR \quad [5.6]$$

waarbij  $\mathbf{R}$  een  $r \times r$  diagonale matrix is met nullen buiten de diagonaal en op de diagonaal alleen de waarden 1 en -1; een -1 in een bepaalde kolom betekent dat de coördinaten van die as van teken worden verwisseld. Een voorbeeld van een reflectie wordt gegeven in Figuur 5.4. De afstandsbehoudendheid blijkt uit het feit dat  $[(-1)(x_{is} - x_{js})]^2 = [x_{is} - x_{js}]^2$ . Deze afstandsbehoudendheid geldt in alle Minkowski-metriecken, want

$$|(-1)(x_{is} - x_{js})|^p = |x_{is} - x_{js}|^p. \quad [5.7]$$



Figuur 5.4 Een voorbeeld van spiegeling

### Rotatie

Dit is een bewerking die neerkomt op het *draaien* van een assenstelsel met de oorsprong als draaipunt. Na rotatie ontstaan voor ieder punt nieuwe coördinaten, die verkregen worden door middel van een lineaire, gewogen combinatie van de oude coördinaten. In het tweedimensionale geval geldt

$$x_{i1}^* = t_{11}x_{i1} + t_{21}x_{i2} \text{ en } x_{i2}^* = t_{12}x_{i1} + t_{22}x_{i2}. \quad [5.8]$$

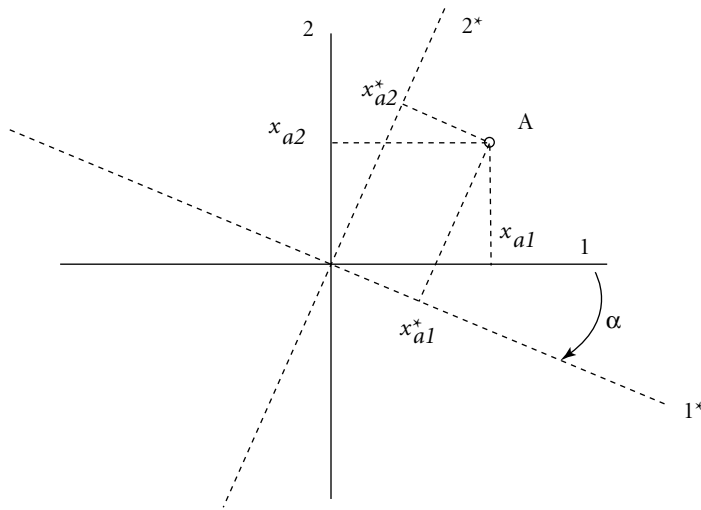
De coëfficiënten  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{21}$  en  $t_{22}$  zijn rotatiegewichten die aangeven hoe een coördinaat op een 'oude' as (aangeduid door het eerste subscript) gewogen wordt om een coördinaat te krijgen op een 'nieuwe' as (aangeduid door het tweede subscript). In het algemene, meerdimensionale geval geldt

$$x_{ia}^* = \sum_s (x_{is} \times t_{sa}). \quad [5.9]$$

wat in matrixnotatie gelijk is aan

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X}\mathbf{T}$$

waarin  $T$  de zogenaamde rotatiematrix is. Als er  $r$  assen zijn is  $T$  van de orde  $r \times r$ . Iedere cel  $t_{sa}$  van  $T$  bevat de cosinus van de hoek tussen de  $s$ -de as van de oorspronkelijke ruimte en de  $a$ -de as van de ruimte na de rotatie. De kolommen van  $T$  bevatten dus de richtingscosinussen van de nieuwe assen (de kolommen) ten opzichte van de assen in de oorspronkelijke ruimte (de rijen). Omgekeerd bevatten de rijen van  $T$  de richtingscosinussen van de oorspronkelijke assen ten opzichte van de assen na rotatie. In twee dimensies heeft de matrix  $T$  de vorm van Tabel 5.1. Een voorbeeld van een rotatie in twee dimensies is weergegeven in Figuur 5.5.



Figuur 5.5 Een voorbeeld van orthogonale rotatie

Tabel 5.1 Orthogonale rotatiematrix in twee dimensies

| oude<br>assen | nieuwe assen              |                           | nieuwe assen    |                |
|---------------|---------------------------|---------------------------|-----------------|----------------|
|               | 1                         | 2                         | 1               | 2              |
| 1             | $\cos(\alpha)$            | $\cos(90^\circ + \alpha)$ | $\cos(\alpha)$  | $\sin(\alpha)$ |
| 2             | $\cos(90^\circ - \alpha)$ | $\cos(\alpha)$            | $-\sin(\alpha)$ | $\cos(\alpha)$ |

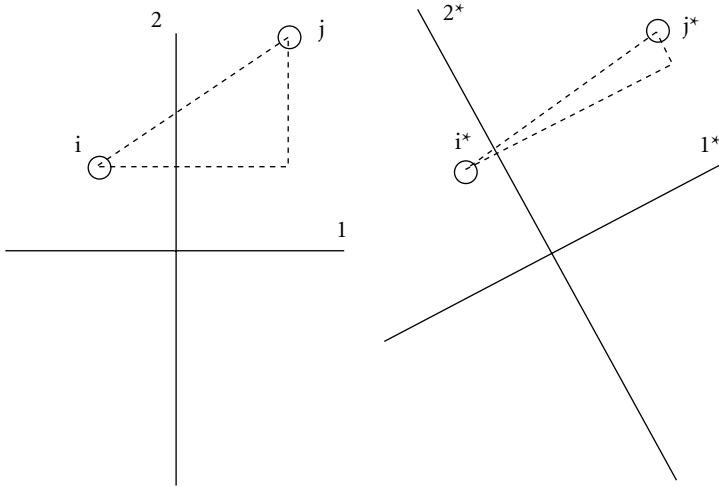
$\alpha$  is de hoek waaronder het nieuwe assenstelsel met de klok mee gedraaid is ten opzichte van het oude assenstelsel

Omdat  $T$  een matrix van richtingscosinussen is, geldt voor elke kolom  $a$  van  $T$  dat  $\sum_s t_{sa}^2 = 1$  en voor elke rij  $s$  van  $T$  dat  $\sum_a t_{sa}^2 = 1$ . Als de rotatie orthogonaal is, dat wil zeggen dat de assen zowel voor als na rotatie loodrecht op elkaar staan, geldt voor alle kolommen  $a \neq b$  dat  $\sum_s t_{sa} t_{sb} = 0$  en voor alle rijen  $s \neq q$  dat  $\sum_a t_{sa} t_{qa} = 0$ . In matrixnotatie:  $T^T T = T T^T = I$ . Merk op dat ook voor reflectie- en permutatiematrices geldt dat  $P^T P = P P^T = I$  en  $R^T R = R R^T = I$ . Dat rotatie een afstandsbehoudende transformatie is, kan het gemakkelijkst worden aangetoond met behulp van Formule [4.4] uit het vorige hoofdstuk.

Na rotatie is

$$\begin{aligned} d_{ij}^{*2} &= \{(\mathbf{x}_i^*)' - (\mathbf{x}_j^*)'\} \{(\mathbf{x}_i^*)' - (\mathbf{x}_j^*)'\}' \\ &= (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j') T T^T (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j')' \\ &= (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j') (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j')' = d_{ij}^2. \end{aligned} \quad [5.11]$$

Deze eigenschap van afstandsbehoudendheid geldt echter alleen in de Euclidische ruimte. Rotatie van de assen in de 'city block'-metriek leidt tot andere afstanden, omdat afstanden daarin gemeten worden langs paden die evenwijdig lopen aan de assen. Geroteerde assen impliceren andere paden en andere afstanden (zie Figuur 5.6).



Figuur 5.6 De effecten van orthogonale rotatie in de Euclidische en de 'city block'-metriek

Naast orthogonale rotaties bestaan er natuurlijk ook niet-orthogonale of scheve rotaties. In het Engels spreekt men van *oblique* rotaties. Duiden we de bijbehorende rotatiematrix aan met  $Z$ , dan is  $X^* = XZ$  met  $Z'Z = \Phi$  en  $ZZ' = \Gamma$ . De matrix  $\Phi$  bevat de cosinussen van de hoeken tussen de scheve assen; op de diagonaal van  $\Phi$  staan dus allemaal enen (net als in  $T$ ).  $\Phi$  is qua vorm dus vergelijkbaar met een correlatiematrix. De afstanden tussen punten in een ruimte met scheve (gecorrleerde) assen kunnen als volgt berekend worden:

$$\begin{aligned} d_{ij}^{*,2} &= \{(\mathbf{x}_i^*)' - (\mathbf{x}_j^*)'\} \{(\mathbf{x}_i^*)' - (\mathbf{x}_j^*)'\}' \\ &= (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j') Z Z' (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j')' \\ &= (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j') \Gamma (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j')'. \end{aligned} \quad [5.12]$$

Merk op dat dit 'Euclidische afstanden' zijn die berekend worden *alsof* de scheve assen loodrecht op elkaar staan (in tegenstelling tot bijvoorbeeld Mahalanobis-afstanden). Merk bovendien op dat scheve rotatie geen afstandsbehoudende transformatie is (want  $\Gamma \neq I$ ).

### 5.3 TRANSFORMATIES DIE NIET AFSTANDSBEHOUDEND ZIJN

Alle afzonderlijke transformaties die we hierboven besproken hebben, zijn speciale gevallen van een lineaire transformatie die te schrijven is als

$$X^* = XKPRT + C. \quad [5.13]$$

Is er namelijk alleen sprake van centrale dilatie, dan is  $P = R = T = I$  en is  $C = 0$ ; wordt er alleen gerooteerd, dan is  $P = R = K = I$  en is eveneens  $C = 0$ . Bij permutatie, rotatie en translatie zijn uiteraard alleen  $R$  en  $K$  gelijk aan  $I$ , enzovoort. Met uitzondering van translatie en centrale dilatie zijn alle genoemde transformaties op te vatten als orthogonale rotaties omdat, net als voor  $T'T$  en  $TT'$ , geldt dat  $P'P = PP' = R'R = RR' = I$ .

Omdat de verschillende transformatiematrices  $K$ ,  $P$ ,  $R$  en  $T$  allemaal een bijzondere vorm hebben en allemaal orthogonaal zijn, moet de transformatie  $X^* = XKPRT$  eigenlijk beschouwd worden als een bijzonder geval van de algemene lineaire transformatie  $X^* = XG$ , waarin  $G$  een willekeurige  $r \times r$ -matrix is.

Nu is volgens een stelling uit de lineaire algebra iedere willekeurige matrix  $G$  te ontbinden als

$$G = PAQ' \quad [5.14]$$

waarin  $P$  en  $Q$   $r \times r$  orthogonale rotatiematrices zijn en  $\Lambda$  een  $r \times r$  diagonale

matrix is.<sup>2</sup> De transformatie  $\mathbf{X}^* = \mathbf{XG}$  levert in het Euclidische geval dus nieuwe afstanden die gelijk zijn aan

$$\begin{aligned} d_{ij}^{*,2} &= \{(\mathbf{x}_i^*)' - (\mathbf{x}_j^*)'\} \{(\mathbf{x}_i^*)' - (\mathbf{x}_j^*)'\}' \\ &= (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j') \mathbf{G} \mathbf{G}' (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j')' \\ &= (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j') \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}' \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}' (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j')' \\ &= (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j') \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{P}' (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j')'. \end{aligned} \quad [5.15]$$

Door de diagonale matrix  $\mathbf{\Lambda}^2$  zijn deze afstanden niet zonder meer evenredig met de oorspronkelijke afstanden  $d_{ij}$ . Dat zou alleen het geval zijn als  $\mathbf{\Lambda}^2 = k\mathbf{I}$ , dat wil zeggen, als de elementen op de diagonaal van  $\mathbf{\Lambda}^2$  allemaal aan elkaar gelijk zijn, namelijk wanneer  $\mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}' = a\mathbf{I}$ . De transformatie  $\mathbf{X}^* = \mathbf{XG}$  is in het algemeen dus niet afstandsbehoudend, in geen enkele Minkowski-metrick. Een voorbeeld van een niet-afstandsbehoudende lineaire transformatie is de Mahalanobis-afstandsfunctie. Mahalanobis-afstanden zijn op te vatten als Euclidische afstanden, in een ruimte waarvan de coördinaten  $\mathbf{X}$  getransformeerd zijn door navermenigvuldiging met  $\mathbf{S}^{-1/2}$ , waarbij  $\mathbf{S}$  de variantie-covariantiematrix is van de scheve, gecorreleerde assen van de ruimte (zie Hoofdstuk 4). Het bijzondere van de Mahalanobis-transformatie is, dat deze de coördinaten op de oorspronkelijke scheve, met elkaar gecorreleerde assen omzet in coördinaten op dimensies in een orthogonaal assensstelsel.

### De gewogen Euclidische afstandsfunctie

Een speciaal geval van  $\mathbf{X}^* = \mathbf{XG}$  dat niet afstandsbehoudend is, doet zich voor als  $\mathbf{G}$  een diagonale matrix is; deze zullen we hier  $\mathbf{W}^{1/2}$  noemen. Substitutie in Formule [5.15] laat zien dat

$$\begin{aligned} d_{ij}^{*,2} &= \{(\mathbf{x}_i^*)' - (\mathbf{x}_j^*)'\} \{(\mathbf{x}_i^*)' - (\mathbf{x}_j^*)'\}' \\ &= (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j') \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{W}^{1/2'} (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j')' \\ &= (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j') \mathbf{W} (\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j')'. \end{aligned} \quad [5.16]$$

In som-notatie ziet deze afstandsfunctie er als volgt uit:

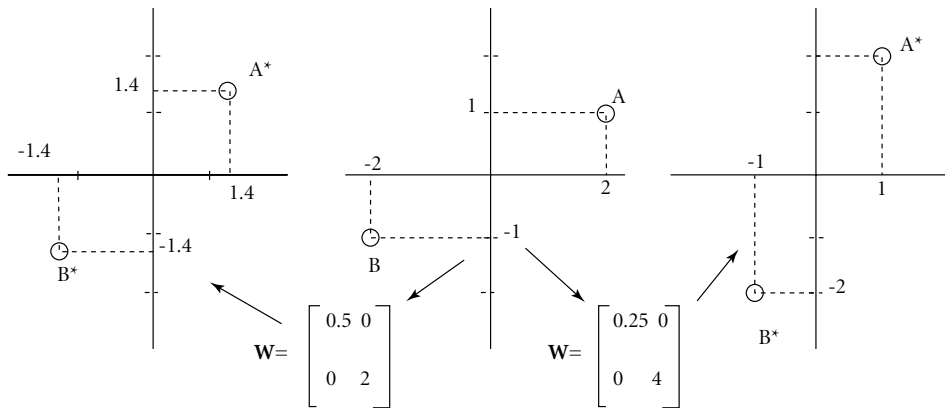
$$d_{ij}^{*,2} = [\sum_s (\mathbf{x}_{is}^* - \mathbf{x}_{js}^*)^2]^{1/2} = [\sum_s (w_s^{1/2} \mathbf{x}_{is} - w_s^{1/2} \mathbf{x}_{js})^2]^{1/2} \quad [5.17]$$

2 Deze ontbinding van een willekeurige matrix  $\mathbf{G}$  wordt *singuliere-waardendecompositie* (svo; singular value decomposition) genoemd.  $\mathbf{P}$  en  $\mathbf{Q}$  zijn respectievelijk de linker en rechter eigenvectoren van  $\mathbf{G}$ ;  $\mathbf{\Lambda}$  is de matrix van *singuliere waarden*. Eigenwaarden-eigenvectorendecompositie (zie Hoofdstuk 2) is een speciaal geval van svo, namelijk wanneer  $\mathbf{G}$  vierkant en symmetrisch is. In dat geval is  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ .

zodat

$$d_{ij}^* = [\sum_s w_s (x_{is} - x_{js})^2]^{1/2}. \quad [5.18]$$

Hierin is  $w_s$  het diagonaalelement in de  $s$ -de rij en  $s$ -de kolom van  $W$  (eigenlijk zouden we moeten schrijven  $w_{ss}$ , maar omdat  $W$  diagonaal is, voldoet  $w_s$  even goed om het betreffende element aan te duiden). De door Formule [5.18] weergegeven afstandsfunctie houdt in dat alle coördinaten op dimensie  $s$  met het gewicht  $\sqrt{w_s}$  vermenigvuldigd (gewogen!) worden. Als er in totaal  $r$  dimensies zijn, dan zijn er  $r$  van zulke gewichten, waarvan sommige gelijk aan nul kunnen zijn. Merk op dat de gewichten  $w_s$  nooit negatief mogen zijn, omdat  $\sqrt{w_s}$  dan geen reële waarde heeft. Afstandsfunctie [5.18] (die identiek is aan Formule [4.11]) wordt de *gewogen Euclidische afstandsfunctie* genoemd. Deze afstandsfunctie wordt vaak als afstandsmodel gebruikt als men meerdere nabijheidsmatrices tegelijkertijd wil analyseren. Deze toepassing komt uitgebreid aan de orde in de hoofdstukken 8 en 9.



Figuur 5.7 Transformaties volgens de gewogen Euclidische afstandsfunctie

## 5.4 IMPLICATIES

De transformaties die hierboven behandeld zijn, kunnen op ieder type multivariate data (zie Hoofdstuk 3) worden toegepast. De volgende vier toepassingen liggen daarbij voor de hand.

In de eerste plaats kan men de genoemde transformaties toepassen om de interpretatie te vergemakkelijken van configuraties die met behulp van MDS gevonden zijn. Met name door spiegeling, permutatie en rotatie kan men beter inzicht krijgen in wat een gevonden MDS-oplossing inhoudelijk betekent. Een

voorbeeld is de kaart van Nederland, die we in zijn gebruikelijke vorm te zien krijgen nadat de assen van Tabel 2.3 geroteerd en gespiegeld zijn. Een ander voorbeeld betreft de mogelijke rotaties van Figuur 1.2 om de meest zinvolle dimensies van persoonlijkheidseigenschappen te vinden. Bij dit soort toepassingen zullen we meestal afstandsbehoudende transformaties kiezen, anders komt de configuratie na transformatie niet langer overeen met het (optimale) resultaat van de MDS-analyse. Rotatie wordt – in een veelheid van variaties – al decennia lang vaak toegepast na factoranalyse.

In de tweede plaats kan men de besproken transformaties toepassen bij het berekenen van profielafstanden uit geobserveerde eigenschappen van objecten. Bij dat type toepassingen zal men vaker transformaties kiezen die niet afstandsbehoudend zijn. Een voorbeeld daarvan is het berekenen van afstanden op basis van gestandaardiseerde variabelen om verschillen in meeteenheid van de eigenschappen op te heffen. Een tweede voorbeeld is het berekenen van Mahalanobis-afstanden om niet alleen met de meeteenheden maar ook met de correlaties tussen de variabelen rekening te houden.

De derde toepassing, die *matching of Procrustes-analyse*<sup>3</sup> genoemd wordt, betreft de vraag of het mogelijk is verschillende (MDS)configuraties van dezelfde objecten tot elkaar te herleiden, en zo ja, welke transformaties daarvoor nodig zijn. De configuraties kunnen afkomstig zijn van verschillende proefpersonen, van verschillende analyses van dezelfde data of van verschillende onderzoeken (als we bijvoorbeeld een nieuwgevonden configuratie willen vergelijken met een afbeelding die eerder in de literatuur gepubliceerd is). Hierover zullen we in Hoofdstuk 7 nog iets meer zeggen.

De vierde toepassing wordt *gegeneraliseerde Procrustes-analyse* genoemd. Hierbij gaat het niet om het *matchen* van configuraties, maar van ‘ruwe’ profieldata. We kunnen nagaan of de beoordelingen van een aantal objecten die door verschillende personen gegeven zijn, door middel van een van de genoemde transformaties *in elkaar vertaald* kunnen worden. Een bekend artikel over gegeneraliseerde Procrustes-analyse is dat van Gower (1975). Toepassingen van dit soort analyses zijn te vinden in consumentenonderzoek en in zogenaamd sensorisch onderzoek (onderzoek naar de smaak, geur, enzovoort van voedingsstoffen en producten). Twee voorbeelden zijn de onderzoeken van Dijksterhuis (1994) en Dijksterhuis en Punter (1990).

---

3 Procrustes was een rover in het oude Griekenland die reizigers gevangen nam en aan de afmetingen van zijn bed aanpaste door hen uit te rekken als ze korter waren of hun ledematen af te hakken als ze langer waren.

